Lista 5 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2023

Notação: nesta lista usaremos a convenção do Wald para os símbolos de Christoffel e curvatura, isto é, ${\Gamma^c}_{ab} = \frac{1}{2}\, g^{ck}\left(\partial_a g_{bk} + \partial_b g_{ak} - \partial_k g_{ab}\right)$ e $\left(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a\right)\omega_c = {R_{abc}}^d\omega_d$. Ainda, $R_{ac} = {R_{abc}}^b$ e $R = {R_a}^a$.

1. (Carroll) Considere uma casca esférica de matéria, com massa M e raio R, girando lentamente com velocidade angular Ω.

   (a) Calcule os campos gravito-elétrico e gravito-magnético resultantes em termos de M, R e Ω.

   (b) Este campo gravitomagnético gera o chamado efeito Lense-Thirring, dado pelo resultante arrasto de referenciais inerciais. Calcule a rotação (em relação ao referencial inercial definido pela métrica de Minkowski de fundo) de um observador em queda livre no centro da casca esférica. Em outras palavras, calcule a precessão das componentes espaciais de um vetor paralelamente transportado localizado no centro da casca esférica).

2. (Carroll) Mostre que a condição do gauge de Lorenz, $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ é equivalente à condição do gauge harmônico, que é definida por $\Box\, x^\mu = 0$.

3. Considere, no contexto da relatividade geral, o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ para poeira, que satisfaz a equação de conservação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Mostre que:

   (a) A equação da continuidade $\nabla_\mu j^\mu = 0$ é satisfeita, onde $j^\mu = \rho u^\mu$.

   (b) As partículas de poeira seguem geodésicas.

4. Considere o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ de um fluido ideal, $T^{\mu\nu} = \left(\rho + \dfrac{p}{c^2}\right) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$.

   (a) Mostre que a equação de conservação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ resulta em uma modificação da equação da continuidade, $\nabla_\mu(\rho u^\mu) + \frac{p}{c^2}\nabla_\mu u^\mu = 0$, e na equação de Euler na relatividade geral $(\rho + \frac{p}{c^2}) u^\nu \nabla_\nu u^\mu + \left(\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + g^{\mu\nu}\right)\nabla_\nu p$.

   (b) Mostre que no limite newtoniano de velocidades pequenas e pressão pequena $(p/c^2 \ll \rho)$, essas equações dão as equações de continuidade e de Euler usuais da mecânica de fluidos não-relativística.

5. No limite de “campo fraco”, o “campo gravitacional” remoto produzido por uma fonte é

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T^{\mu\nu}(x^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV',$$

onde $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\nu}$, $h = h^{\mu}{}_{\mu}$ e $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Para uma distribuição estacionária de massa, a única componente não-nula do tensor de energia-momento é $T^{00} = \rho c^2$. Determine a métrica produzida na região remota por uma massa M na origem.

6. (Exercício 3.1, capítulo 5 do Foster & Nightingale) Obtenha a aproximação de onda plana para a onda gravitacional gerada por um haltere rodando, como medida por um observador distante situado no plano de rotação do haltere. Trabalhe no gauge TT.

7. **Onda gravitacional exata** (exercício 3 da lista 4, do curso do Maurício Richartz)

   Considere a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + L^2(e^{2\beta}dx^2 + e^{-2\beta}dy^2),$$

   onde L e β dependem apenas da diferença $t - z$.

   a) Escolha novas coordenadas $u = t - z$ e $v = t + z$, mantendo x e y inalterados. Escreva a métrica nesse novo sistema de coordenadas.

   b) Calcule o tensor de Ricci para essa geometria e mostre que a única componente não nula é

$$R_{uu} = -\frac{2}{L}\left(L'' + (\beta')^2 L\right).$$

   c) Encontre o limite desse espaço-tempo que corresponde a uma onda gravitacional de pequena amplitude. Qual é a polarização dessa onda linearizada?